

Düzlemsel İki Serbestlik Dereceli Mekanizmaların En Küçük Kareler Toplamı Yöntemi ile İşlev Sentezi

G. Kiper* B. Bağdadioglu†
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü
İzmir

R. I. Alizada‡
Azerbaycan Havacılık Akademisi
Bakü

Özet—Bu çalışmada düzlemsel iki serbestlik dereceli beş ve yedi uzuvlu düzlemsel mekanizmalar ile en küçük kareler toplamı yöntemi kullanılarak işlev sentezi uygulanmaktadır. Beş uzuvlu mekanizmalar tek devreli iken yedi mafsallı mekanizmalar iki devre birleştirilerek oluşmaktadır. R döner mafsalsal, P ise kayar mafsalsal olmak üzere $RPRRR$, $RRRRR$, $2RPR-RRR$, $RPR-RRR-RRR$, $2RRR-RRR$, $PRRRR$, $PPRRR$, $PRR-RRR-RRR$, $PRR-PRR-RRR$ mekanizmaları için sentez formülasyonu türetilmiş ve bilgisayar ortamında sayısal model oluşturulmuştur. Sayısal çalışmalardan bir tanesi çalışmada örnek olarak sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: İki girdili işlev sentezi, iki serbestlik dereceli düzlemsel mekanizmalar, en küçük kareler toplamı yöntemi

Abstract—Function synthesis problem with planar two degrees-of-freedom five-link and seven-link linkages by using least squares approximation method is addressed in this study. While five-link linkages have single loop, seven link mechanisms have two independent loops. $RPRRR$, $RRRRR$, $2RPR-RRR$, $RPR-RRR-RRR$, $2RRR-RRR$, $PRRRR$, $PPRRR$, $PRR-RRR-RRR$, $PRR-PRR-RRR$ mechanisms are examined, where R stands for a revolute joint and P stands for a prismatic joint. The formulations are implemented in computer and many computational examples are worked out. One of the computational studies is presented as an example.

Keywords: Function synthesis with two inputs, two degrees-of-freedom planar linkages, least squares approximation method

I. Giriş

Tek serbestlik dereceli (s°) mekanizmaların kinematik sentezi için analitik yöntemlerin kullanılması bugüne kadar çok yaygın olarak incelenmiştir. Öte yandan, $2-s^\circ$ düzlemsel yedi uzuvlu mekanizmaları tasarlamak için çoğunlukla sayısal en iyileme teknikleri kullanılmıştır. Svoboda'ya [1] göre düzlemsel 7-çubuk mekanizmalarının sentezi iki aşamada yapılmaktadır. Her aşamada 7-çubuk mekanizmasının iki uzvu birbirine sabitlenir, yani bir mafsalsal açısı sabitlenir. Ortaya çıkan $1-s^\circ$ 6-çubuk mekanizması irdelenir. Svoboda [1] basit iki girdili toplama, çarpma ve bölme gibi işlevleri yapmak üzere düzlemsel mekanizmalar tasarlamak için geometrik

araçlar geliştirmiştir. Balli ve Chand [2] 7-çubuk mekanizması ile iki ölü konum arasında hareket sentezi yapmışlardır. Daivagna ve Balli [3] işlev sentezi için $2-s^\circ$ düzlemsel 7R1P (R: döner mafsalsal, P: prizmatik mafsalsal) mekanizması üzerine çalışmıştır. Balli ve diğ. [4] bir başka çalışmalarında diad tekniği ile $2-s^\circ$ düzlemsel 7-çubuk mekanizmalarını sentezini ele almışlardır. Lakshminarayana ve diğ. [5-11], konum ve hız sıfır-hata noktaları ile iki girdili işlev sentezi için 7-çubuk ve 9-çubuk düzlemsel mekanizmaları ile yüksek mertebeli sentez üzerinde çalışmışlardır. Mruthyunjaya [12-13] döner girdi/çıkıtı ve kayar girdi/çıkıtı kullanılarak altı sıfır-hata noktası ile “noktasal konum indirgeme” ismini verdikleri bir grafik yöntem geliştirmiştir. Kohli ve Soni [14], $2-s^\circ$ 7-çubuk mekanizmaların işlev, yörünge ve hareket sentezi üzerine çalışmışlardır. Bu çalışmada, devre kapalılık denklemleri çıkarılarak elde edilen denklem takımı sayısal yöntemlerle çözülmüştür. Yazarlar işlev sentezi problemi için 13 sıfır-hata noktası ile bir $2RRR-RR$ düzlemsel paralel mekanizması kullanmışlardır.

Yukarıda bahsi geçen sentez yöntemlerin çoğu elde edilmek istenilen işlevin tanım kümesinden seçilen sıfır-hata noktalarında işlevin sıfır hata ile gerçekleştirilmesi için gerekli denklemler üzerine kurulmuştur. Bu yöntemlere interpolasyon yöntemleri denmektedir. Öte yandan, en küçük kareler toplamı yönteminin amacı, işlev tanım kümesinde seçilen tasarım noktalarındaki hataların karelerinin toplamını en aza indirmektir. [15-16] çalışmalarında en küçük kareler toplamı yöntemi, $2-s^\circ$ mekanizmalar ile iki girdili işlev sentezi için kullanılmıştır. Levitskii, düzlemsel 4-kol mekanizmasının işlev sentezi problemi için interpolasyon, en küçük kareler ve Çebişev yaklaşımı yöntemlerini çalışmıştır [17].

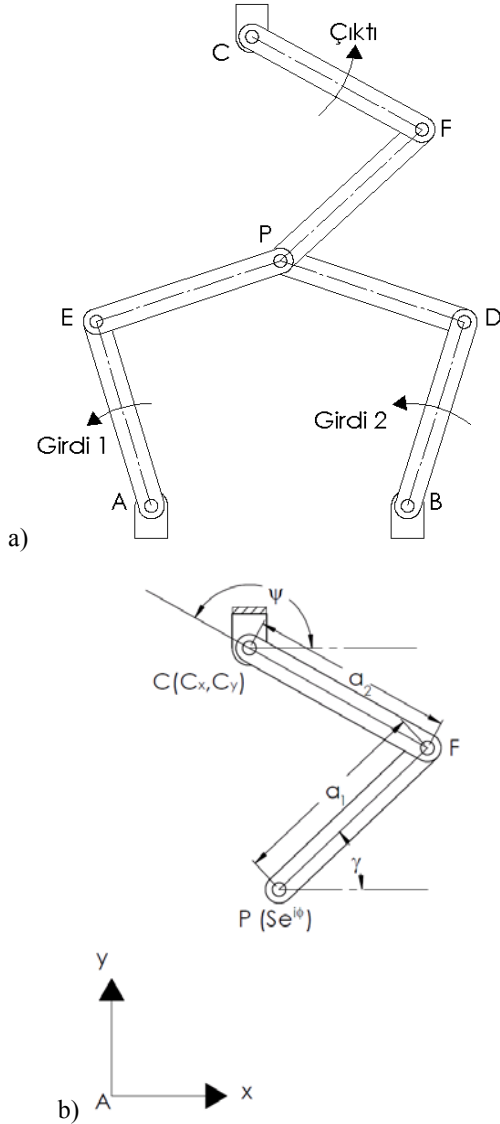
Bu çalışmanın amacı iki girdili işlevi yaklaşık olarak gerçekleştirmek üzere 5 ve 7 uzuvlu $2-s^\circ$ düzlemsel mekanizmaların sentezlenmesi için araçlar oluşturmaktır. Sentezlenen mekanizmaların en genel formu Şekil 1a'da gösterilmektedir. Şekil 1a'daki mekanizmada yalnızca döner mafsallar görünse de girdi ya da çıkıtı uzuvları kaideye kayar mafsallarla da bağlı olabilirler. $RPRRR$, $RRRRR$, $2RPR-RRR$, $RPR-RRR-RRR$, $2RRR-RRR$, $PRRRR$, $PPRRR$, $PRR-RRR-RRR$, $PRR-PRR-RRR$ ve $PRR-RPR-RRR$ mekanizmaları üzerinde çalışılmıştır. Bu mekanizmaların matematiksel modelleri çıkarılarak

* gokhankiper@iyte.edu.tr

† barisbagdadioglu@gmail.com

‡ alizada_rasim@hotmail.com

sentez problemi analitik olarak oluşturulmakta ve çözülmektedir. Tüm mekanizmalarda sondaki RRR mafsal yapısına sahip PFC diadı bulunmaktadır ve bu diad tasarlanmaktadır. Şekil 2b'de gösterildiği gibi bu diadın sabit ucu (C_x, C_y) ve a_1, a_2 uzuv boyutları tasarım parametreleridir. Diğer uzuv boyutları serbest olarak seçilmektedir. Mekanizmanın geri kalanında kutupsal koordinatlarda $Se^{i\phi}$ ile ifade edilen P noktasının hareketi mekanizma girdilerine (q_1, q_2) bağlı olarak belirlenmektedir: $Se^{i\phi} = f(q_1, q_2)$. Böylelikle seçilen (q_{1i}, q_{2i}, ψ_i) ($i = 1, \dots, n$) tasarım noktaları için (S_i, ϕ_i, ψ_i) noktaları belirlenerek en küçük kareler toplamı yöntemi ile PFC diadı tasarlanabilmektedir. Son olarak yöntemin uygulanışını göstermek için sayısal örnekler verilmektedir.



Şekil 1. a) 2-s° 7-mafsallı mekanizmaların genel görünümü, b) RRR diadı

II. Problem Tanımı ve Genel Formülasyon

RRR diadı, 2-s° düzlemsel 7-çubuk mekanizması kullanılarak $z = f(x, y)$ işlevini oluşturulmak için gereklidir. RRR bölümü Şekil 1b'de gösterilmektedir. Mekanizmanın geri kalanı P dönül mafsal noktasından bağlı uzuvlar ile oluşturulmaktadır. PFC diadına RR, PR, RP ya da PP diadı ya da diadları eklenerek alternatif 2-s° mekanizmalar elde edilmektedir. Bu çalışmada $RPRRR$, $RRRRR$, $2RPR-RRR$, $RPR-RRR-RRR$, $2RRR-RRR$, $PRRRR$, $PPRRR$, $PRR-RRR-RRR$, $PRR-PRR-RRR$ ve $PRR-RPR-RRR$ mekanizmaları incelenmiştir. “_” işareti o mafsalla ilişkili mafsal değişkeninin girdi olduğunu belirtmektedir. Tüm bu mekanizmalarda prizmatik ya da dönül mafsal olarak iki girdi bulunmaktadır. Ancak bizim tüm problemlerimizde, bu iki girdili bölümlerden bulunacak P noktasının kutupsal koordinat ifadesi olan $Se^{i\phi}$ PFC diadı ile birleştirilerek çıktı değeri olan ψ bulunmaktadır.

Problemi biraz daha da basitleştirmek için, alt bölümdeki uzuv boyutları serbest seçilmiş olarak varsaydığımızda, sadece geri kalan Şekil 1b'de görülen a_1, a_2 uzuv boyutları ve PFC diadının sabit ucu olan C_x ve C_y koordinat değerlerini tasarlamamız gerekmektedir. P noktasının kutupsal koordinat ifadesi olan $Se^{i\phi}$ değeri verildiğinde, aşağıda gösterilen vektör denklemleri yazılabilmektedir:

$$\begin{aligned} \overline{PA} + \overline{AC} + \overline{CF} &= \overline{AC} - \overline{FC} - \overline{AP} = \overline{PF} \\ \Rightarrow |\overline{FC} - \overline{AC} + \overline{AP}| &= |C_x + iC_y - a_2e^{i\psi} - Se^{i\phi}| = a_1 \\ \Rightarrow (C_x - a_2c\psi - S\phi)^2 + (C_y - a_2s\psi - S\phi)^2 &= a_1^2 \quad (1) \\ \Rightarrow a_1^2 - a_2^2 - C_x^2 - C_y^2 - S^2 + 2a_2C_xc\psi + 2C_xS\phi & \\ + 2a_2C_ys\psi - 2a_2Sc(\psi - \phi) + 2C_ySs\phi &= 0 \end{aligned}$$

Burada c ve s kosinüs ve sinüsün kısaltmalarıdır. Denklem (1)'in polinom olarak gösterimi

$$\sum_{j=1}^6 P_j f_j(\bar{x}) - F(\bar{x}) = 0 \quad (2)$$

şeklinde dir. Denklem (2)'de \bar{x} , girdi ve çıktı değişkenler olan (S, ϕ, ψ) değerlerini ifade eder ve

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1^2 - a_2^2 - C_x^2 - C_y^2, P_2 = C_y, P_3 = C_x, P_4 = a_2, \\ P_5 &= a_2C_x, P_6 = -a_2C_y, f_1(\bar{x})=1, f_2(\bar{x})=2Ss\phi, \\ f_3(\bar{x}) &= 2Sc\phi, f_4(\bar{x}) = -2Sc(\psi - \phi), \\ f_5(\bar{x}) &= 2c\psi, f_6(\bar{x}) = -2s\psi, F(\bar{x}) = S^2 \end{aligned} \quad (3)$$

dir. Denklem (2)'de 4 adet tasarım parametresi bulunmaktadır (a_1, a_2, C_x ve C_y), ama 6 adet P_j

bulunmaktadır. P_5 ve P_6 diğer P_j 'ler cinsinden yazıldığında aşağıdaki bağıntılar görülmektedir:

$$P_5 = P_3 P_4 \quad \text{ve} \quad P_6 = -P_2 P_4 \quad (4)$$

$P_5 = \lambda_1$ ve $P_6 = \lambda_2$ (Lagrange parametreleri) ve $j = 1, \dots, 4$ için $P_j = \ell_j + m_j \lambda_1 + n_j \lambda_2$ olarak tanımlandığında Denklem (2):

$$\sum_{j=1}^4 (\ell_j + m_j \lambda_1 + n_j \lambda_2) f_j(\bar{x}) + \lambda_1 f_5(\bar{x}) + \lambda_2 f_6(\bar{x}) - F(\bar{x}) = 0 \quad (5)$$

haline dönüşür. Denklem (5)'de λ_1 ve λ_2 bağımsız değişkenlerdir. Bu yüzden λ_1 ve λ_2 'nin katsayıları ile geri kalan kısım sıfıra eşit olmalıdır:

$$\sum_{j=1}^4 \ell_j f_j(\bar{x}) - F(\bar{x}) = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^4 m_j f_j(\bar{x}) + f_5(\bar{x}) = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^4 n_j f_j(\bar{x}) + f_6(\bar{x}) = 0 \quad (8)$$

$i = 1, \dots, N$ ($N > 4$) için \bar{x}_i tasarım noktaları ile en küçük karelerin toplamı yöntemi uygulandığında öncelikle

$$S_\ell = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^4 \ell_j f_{ji} - F_i \right]^2 \quad (9)$$

$$S_m = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^4 m_j f_{ji} + f_{5i} \right]^2 \quad (10)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^4 n_j f_{ji} + f_{6i} \right]^2 \quad (11)$$

tanımlanır. (9)-(11) Denklemlerinde $f_{ji} = f_j(\bar{x}_i)$, $f_{5i} = f_5(\bar{x}_i)$, $f_{6i} = f_6(\bar{x}_i)$, ve $F_i = F(\bar{x}_i)$ 'dir. Karelerinin toplamının minimum değerini bulabilmek için (9)-(11) Denklemlerinin ℓ_j , m_j ve n_j değerlerine göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenir:

$$\frac{1}{2} \frac{dS_\ell}{d\ell_k} = \sum_{i=1}^N [f_{i1} \ell_1 + f_{i2} \ell_2 + f_{i3} \ell_3 + f_{i4} \ell_4 - F_i] f_{ki} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dS_m}{dm_k} = \sum_{i=1}^N [f_{i1} m_1 + f_{i2} m_2 + f_{i3} m_3 + f_{i4} m_4 + f_{5i}] f_{ki} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dS_n}{dn_k} = \sum_{i=1}^N [f_{i1} n_1 + f_{i2} n_2 + f_{i3} n_3 + f_{i4} n_4 + f_{6i}] f_{ki} = 0 \quad (14)$$

$k=1,2,3,4$ için (12)-(14) Denklemlerinde görüldüğü üzere her bir denklem 4 bilinmeyen cinsinden (sırası ile $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$; m_1, m_2, m_3, m_4 ve n_1, n_2, n_3, n_4) doğrusal denklem takımı şeklindedir. Denklem (12)-(14) matris biçiminde yazıldığında

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i2} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i3} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i4} f_{ki} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N F_i f_{ki} \quad (15) \\ \Rightarrow [A_{\ell_j}] [\ell_j] = [b_k] \quad k=1,2,3,4$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i2} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i3} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i4} f_{ki} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{5i} \\ f_{5i} \\ f_{5i} \\ f_{5i} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N f_{5i} f_{ki} \quad (16) \\ \Rightarrow [A_{m_j}] [m_j] = [c_k] \quad k=1,2,3,4$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i2} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i3} f_{ki} \\ \sum_{i=1}^N f_{i4} f_{ki} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{6i} \\ f_{6i} \\ f_{6i} \\ f_{6i} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N f_{6i} f_{ki} \quad (17) \\ \Rightarrow [A_{n_j}] [n_j] = [d_k] \quad k=1,2,3,4$$

elde edilir. (15)-(17) Denklemlerinde $A_{k_j} = \sum_{i=1}^N f_{ki} f_{ji}$,

$[A_{k_j}]$ 4×4 katsayı matrisi; $j, k = 1, \dots, 4$ için $b_k = \sum_{i=1}^N F_i f_{ki}$,

$c_k = -\sum_{i=1}^N f_{5i} f_{ki}$, $d_k = -\sum_{i=1}^N f_{6i} f_{ki}$ $[l_j] = [l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4]^T$,

$[m_j] = [m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4]^T$, $[n_j] = [n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4]^T$

ve de $[b_k]$, $[c_k]$ 4×1 sütun matrisleridir. Burada ℓ_j , m_j ve n_j Denklem (15)-(17) denklemlerinden doğrusal olarak çözülebilmektedir. ℓ_j , m_j ve n_j değerlerine göre λ_1 ve λ_2 çözümlür:

$$\lambda_1 = P_3 P_4 = (\ell_3 + m_3 \lambda_1 + n_3 \lambda_2)(\ell_4 + m_4 \lambda_1 + n_4 \lambda_2) \\ \Rightarrow m_3 m_4 \lambda_1^2 + n_3 n_4 \lambda_2^2 + (m_3 n_4 + n_3 m_4) \lambda_1 \lambda_2 + (\ell_3 m_4 + m_3 \ell_4 - 1) \lambda_1 + (l_3 n_4 + n_3 l_4) \lambda_2 + \ell_3 \ell_4 = 0 \quad (18)$$

$$\lambda_2 = -P_2 P_4 = -(\ell_2 + m_2 \lambda_1 + n_2 \lambda_2)(\ell_4 + m_4 \lambda_1 + n_4 \lambda_2) \\ \Rightarrow m_2 m_4 \lambda_1^2 + n_2 n_4 \lambda_2^2 + (m_2 n_4 + n_2 m_4) \lambda_1 \lambda_2 + (\ell_2 m_4 + m_2 \ell_4 + 1) \lambda_1 + (\ell_2 n_4 + n_2 \ell_4) \lambda_2 + \ell_2 \ell_4 = 0 \quad (19)$$

(18)-(19) Denklemlerinden λ_2 elendiğinde λ_1 cinsinden bir 3. derece polinom denklem elde edilir. Bu eleme işlemlerinin ayrıntıları Alizade ve Kilit'in [18] çalışmasında yer almaktadır. 3. derece polinom denklem çözüldüğü zaman bir ya da üç gerçel kök çıkabilir. Bu

gerçek değerlerden seçilebilecek bir değer ile uygun uzun boyutları ve/veya daha küçük hata değerleri elde edilebilir. λ_1 seçildikten sonra (18)-(19) Denklemlerinde λ_2 tek çözüm olarak elde edilir. λ_1 ve λ_2 değerleri bulunduğundan sonra, $j = 1, \dots, 4$ için $P_j = \ell_j + m_j \lambda_1 + n_j \lambda_2$ bulunur ve son olarak da (3) Denkleminde tasarım parametreleri değerleri şu şekilde elde edilir:

$$C_x = P_3, C_y = P_2, a_2 = P_4, a_1 = \sqrt{P_1 + a_2^2 + C_x^2 + C_y^2} \quad (20)$$

Denklem (20)'de gerçek uzun boyutları elde edebilmek için $P_1 + a_2^2 + C_x^2 + C_y^2$ değerinin sıfırdan büyük olması gerekmektedir. Sonraki bölümlerde farklı mekanizmalar için S ve ϕ değerlerini elde etmeye matematiksel modelleri çıkarılmaktadır.

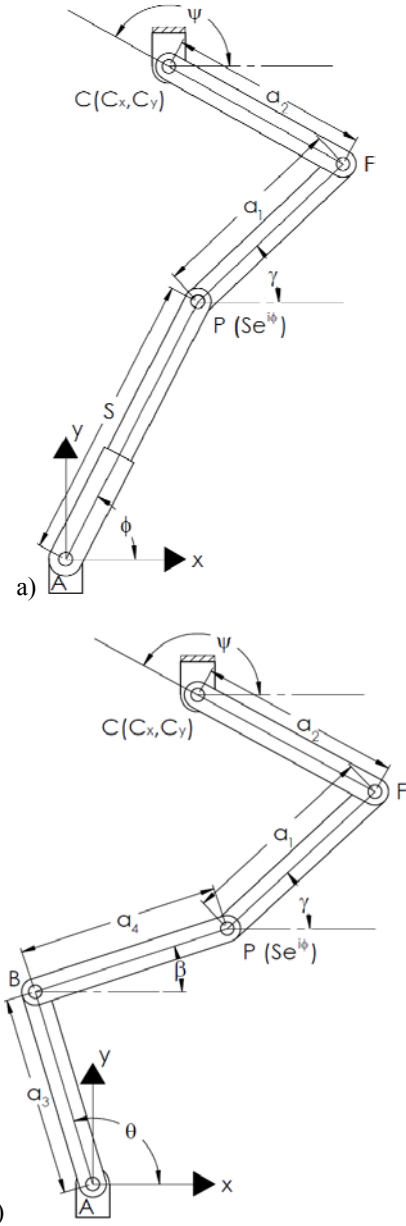
A. RPRRR ve RRRRR mekanizmaları

Şekil 2a'da görülen RPRRR mekanizmasının girdi değerleri olan ϕ ve S , P noktasının kutupsal koordinat noktasını vermektedir. Bu nedenle yukarıdaki formülasyon doğrudan kullanılabilir. Bu mekanizmalar için herhangi bir uzun boyutu değeri varsayma ihtiyacı bulunmamaktadır.

Girdi ve çıktı değerleri θ ve β olan RRRRR mekanizması Şekil 2b'de görülmektedir. Bu mekanizmanın en küçük kareler toplamı ile işlev sentezi çözümü (Kiper, Bağdadioglu, Bilginan, 2014) çalışmasında gösterilmektedir. Tüm uzun boyutları aynı ölçekle çarpılsa da girdi/çıkı ilişkisi değişmeyeceğinden $|AC| = 1$ olarak varsayılabilir. a_1, a_2, a_3, a_4 değerleri analitik olarak çözülebilmektedir. Dikkat edilirse $|AC| = 1$ seçildiğinde C_x ve C_y değerleri birbirlerinden bağımsız seçilememektedir.

Alternatif olarak, a_3 ve a_4 varsayılarak C_x ve C_y için çözüm yapılması da mümkündür. Burada a_3 ve a_4 değerlerinden biri ölçeklendirme amaçlı olarak 1 seçilebilmektedir. Bu durumda girdiler θ ve β 'ya göre P noktasının polar koordinat değerleri olan S ve ϕ hesaplanabilmektedir

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BP} &= \overline{AP} \Rightarrow a_3 e^{i\theta} + a_4 e^{i\beta} = S e^{i\phi} \\ \Rightarrow S &= \sqrt{(a_3 \cos\theta + a_4 \cos\beta)^2 + (a_3 \sin\theta + a_4 \sin\beta)^2} \\ &= \sqrt{a_3^2 + a_4^2 + 2a_3 a_4 \cos(\theta - \beta)} \\ \phi &= \text{atan2}(a_3 \cos\theta + a_4 \cos\beta, a_3 \sin\theta + a_4 \sin\beta) \end{aligned} \quad (21)$$



Şekil 2. a) RPRRR ve b) RRRRR mekanizmaları

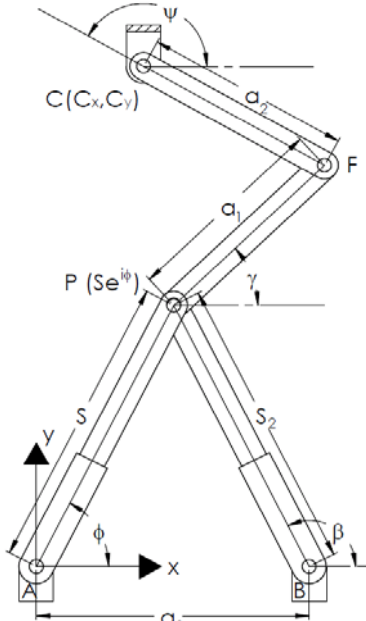
B. 2RPR-RRR mekanizması

2RPR-RRR mekanizmasının girdi değerleri Şekil 3'te görülen S ve S_2 prizmatik değişkenleridir. a_3 değeri serbest seçilmektedir.

Prizmatik girdi S doğrudan verilmektedir, fakat ϕ değeri S ve S_2 girdileri cinsinden hesaplanmalıdır. PAB üçgeninde kosinüs teoremi uygulandığında

$$S_2^2 = a_3^2 + S^2 - 2a_3 S \cos\phi \Rightarrow \phi = \cos^{-1} \frac{a_3^2 + S^2 - S_2^2}{2a_3 S} \quad (22)$$

elde edilir.



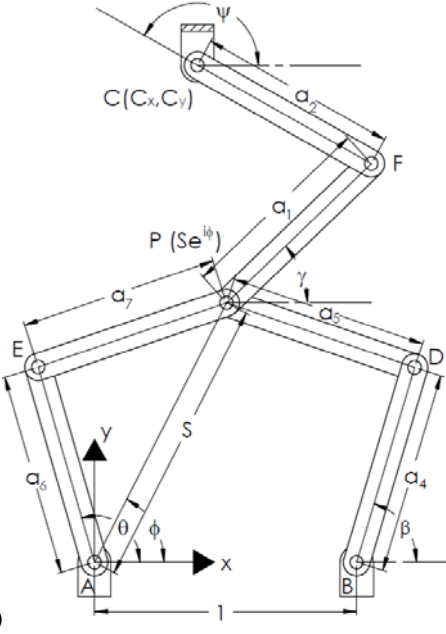
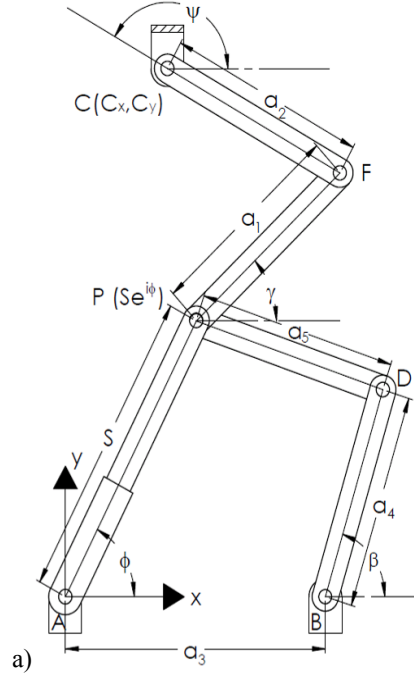
Şekil 3. 2RPR-RRR mekanizması

C. RPR-RRR-RRR mekanizması

RPR-RRR-RRR mekanizmasında (Şek. 4a) prizmatik girdi S ve dönel girdi β bulunmaktadır. a_3 , a_4 ve a_5 uzuv boyutları serbest olarak seçilebilmektedir. Prizmatik girdi olan S değeri verilmektedir, lakin ϕ değeri S ve β cinsinden hesaplanmalıdır:

$$\begin{aligned}
 & -\overline{BD} - \overline{AB} + \overline{AP} = \overline{DP} \\
 \Rightarrow & |\overline{AP} - \overline{BD} - \overline{AB}| = |S e^{i\phi} - a_3 - a_4 e^{i\beta}| = a_5 \\
 \Rightarrow & (S \cos \phi - a_3 - a_4 \cos \beta)^2 + (S \sin \phi - a_4 \sin \beta)^2 = a_5^2 \\
 \Rightarrow & -2(a_3 + a_4 \cos \beta) S \cos \phi - 2a_4 S \sin \beta \sin \phi = a_5^2 - a_3^2 - a_4^2 - S^2 - 2a_3 a_4 \cos \beta
 \end{aligned} \quad (23)$$

Denklem (23) $A \cos \phi + B \sin \phi = C$ biçimindedir ve iki farklı ϕ değeri için yarım açının tanjantı dönüşümü kullanılarak analitik olarak çözülebilmektedir. Mekanizma bu değerlerden en uygun olanı seçilerek tasarlanabilmektedir.



Şekil 4. a) RPR-RRR-RRR ve b) 2RRR-RRR mekanizmaları

D. 2RRR-RRR mekanizması

Şekil 4b'de görülen 2RRR-RRR mekanizmasında girdiler θ ve β açılarıdır. Mekanizma ölçeği girdi/çıkı ilişkisini etkilemeyeceğinden $|AB| = 1$ alınabilir. AEPDB devresinde a_4 , a_5 , a_6 ve a_7 uzuv boyutları serbest olarak seçilebilmektedir. θ ve β girdileri verildiğinde E ve D noktalarının koordinatları sırası ile $a_6 e^{i\theta}$ ve $1 + a_4 e^{i\beta}$ ifadeleri ile bulunabilir. a_5 ve a_7 uzuv boyutları için

$$\begin{aligned} |\overline{PE}| &= |P_x + iP_y - a_6 e^{i0}| = a_7 \Rightarrow (P_x - a_6 \cos \theta)^2 + (P_y - a_6 \sin \theta)^2 = a_7^2 \\ &\Rightarrow P_x^2 + P_y^2 + a_6^2 - a_7^2 - 2a_6 \cos \theta P_x - 2a_6 \sin \theta P_y = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} |\overline{PD}| &= |P_x + iP_y - 1 - a_4 e^{i\beta}| = a_5 \Rightarrow (P_x - 1 - a_4 \cos \beta)^2 + (P_y - a_4 \sin \beta)^2 = a_5^2 \\ &\Rightarrow P_x^2 + P_y^2 + 1 + a_4^2 + 2a_4 \cos \beta - a_5^2 - 2(1 + a_4 \cos \beta)P_x - 2a_4 \sin \beta P_y = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

yazılabilir. P_x ve P_y değerlerini bulmak için Denklem (24) Denklem(25)'ten çıkarıldığında

$$\begin{aligned} a_6^2 - a_7^2 - 1 - a_4^2 - 2a_4 \cos \beta + a_5^2 + 2(1 + a_4 \cos \beta - a_6 \cos \theta)P_x \\ + 2(a_4 \sin \beta - a_6 \sin \theta)P_y = 0 \Rightarrow P_y = mP_x + n \end{aligned} \quad (26)$$

elde edilmektedir. Denklem (26)'da $m = -\frac{1 + a_4 \cos \beta - a_6 \cos \theta}{a_4 \sin \beta - a_6 \sin \theta}$ ve

$$n = -\frac{a_6^2 - a_7^2 - 1 - a_4^2 - 2a_4 \cos \beta + a_5^2}{2(a_4 \sin \beta - a_6 \sin \theta)}$$

(24)'ten

$$\begin{aligned} P_x^2 + (mP_x + n)^2 + a_6^2 - a_7^2 - 2a_6 \cos \theta P_x - 2a_6 \sin \theta (mP_x + n) = 0 \\ \Rightarrow (1 + m^2)P_x^2 + 2(mn - a_6 \cos \theta - ma_6 \sin \theta)P_x + n^2 + a_6^2 - a_7^2 - 2na_6 \sin \theta = 0 \quad (27) \\ \Rightarrow P_x = \frac{-(mn - a_6 \cos \theta - ma_6 \sin \theta) \pm \sqrt{(mn - a_6 \cos \theta - ma_6 \sin \theta)^2 - (1 + m^2)(n^2 + a_6^2 - a_7^2 - 2na_6 \sin \theta)}}{1 + m^2} \end{aligned}$$

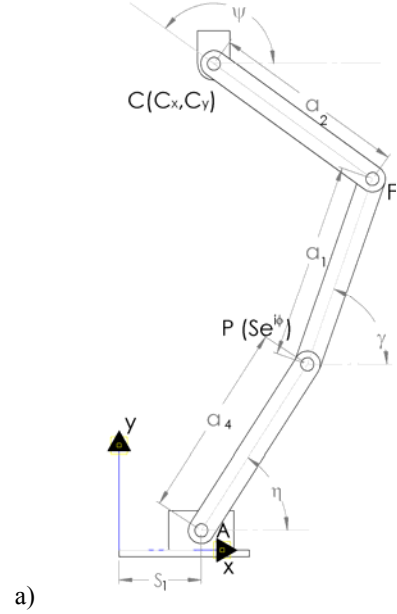
bulunur. Denklem (27)'deki \pm işareti, EPD diadındaki alternatif montaj modlarını belirtmektedir. + ya da - seçilmesi tasarımcının tercihi bırakılmıştır. Öncelikle P_x değeri hesaplanmaktadır, bundan sonra da Denklem (26) kullanılarak P_y değeri bulunmaktadır. S ve ϕ değerlerinin P_x ve P_y kutupsal koordinatları cinsinden gösterimi şu şekildedir:

$$S = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad \text{ve} \quad \phi = \text{atan2}(P_x, P_y) \quad (28)$$

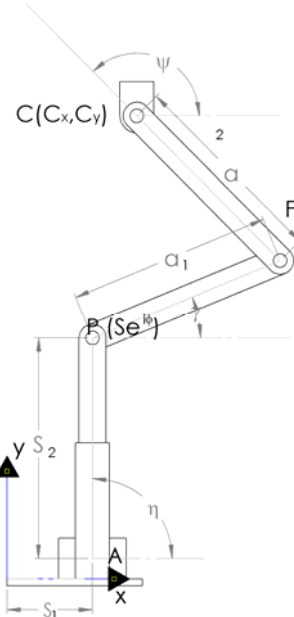
E. PRRRR ve PPRRR mekanizmaları

PRRRR mekanizması Şekil 5a'da gösterilmektedir. Bu mekanizmanın girdi değerleri S_1 ve β değişkenleridir ve a_3 uzunluğu serbest olarak seçilebilmektedir. S ve ϕ değerlerinin, S_1 ve β cinsinden çözümü:

$$\begin{aligned} S_1 + a_3 e^{i\theta} = S_1 + a_3 \cos \theta + ia_3 \sin \theta = S e^{i\phi} \\ \Rightarrow S = \sqrt{(S_1 + a_3 \cos \theta)^2 + a_3^2 \sin^2 \theta}, \quad (29) \\ \phi = \text{atan2}(S_1 + a_3 \cos \theta, a_3 \sin \theta) \end{aligned}$$



a)



b)

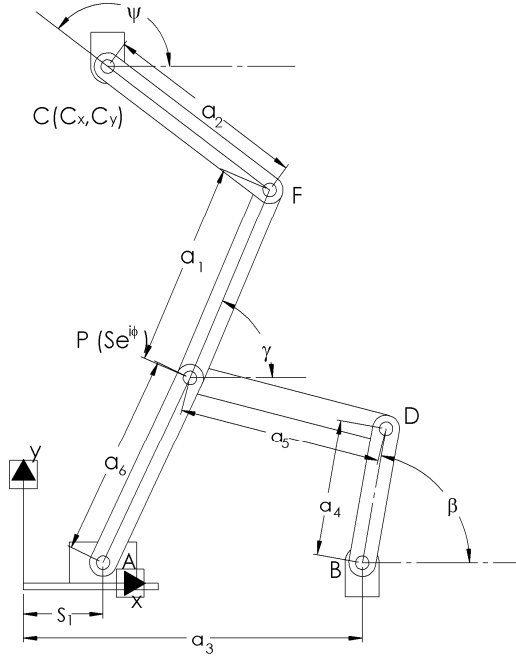
Şekil 5. a) PRRRR ve b) PPRRR mekanizmaları

Şekil 5b'de görülen PPRRR mekanizmasında S_1 ve S_2 iki kayar mafsalsal girdisidir. S ve ϕ şu şekilde bulunur:

$$S_1 + iS_2 = S e^{i\phi} \Rightarrow S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} \quad \text{ve} \quad \phi = \text{atan2}(S_1, S_2) \quad (30)$$

F. PRR-RRR-RRR mekanizması

Kayar mafsalsal girdisi S_1 ve dönele mafsalsal girdisi β ile PRR-RRR-RRR mekanizması Şekil 6'da gösterilmektedir. Bu mekanizmada a_3 , a_4 , a_5 ve a_6 serbest seçilebilen uzuv boyutlarıdır. S_1 ve β değerleri verildiğinde, A ve D noktalarının koordinatları bulunabilmektedir.



Şekil 6. PRR-RRR-RRR mekanizması

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= |P_x + iP_y - S_1| = a_6 \Rightarrow (P_x - S_1)^2 + (P_y)^2 = a_6^2 \\ &\Rightarrow P_x^2 + P_y^2 - 2S_1P_x + S_1^2 - a_6^2 = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} |\overline{DP}| &= |P_x + iP_y - a_3 - a_4e^{i\beta}| = a_5 \Rightarrow (P_x - a_3 - a_4c\beta)^2 + (P_y - a_4s\beta)^2 = a_5^2 \\ &\Rightarrow P_x^2 + P_y^2 - 2(a_3 + a_4c\beta)P_x - 2a_4s\beta P_y + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + 2a_3a_4c\beta = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

P_x ve P_y değerlerini bulabilmek için Denklem (32), Denklem (31)'den çıkarıldığında

$$\begin{aligned} a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 - S_1^2 + 2a_3a_4c\beta \\ - 2(a_3 + a_4c\beta - S_1)P_x - 2a_4s\beta P_y = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

bulunur. Denklem (33)'te P_y , P_x cinsinden yazıldığında

$$P_y = mP_x + n \quad (34)$$

dir. (34) Denkleminde $m = \frac{a_3 + a_4c\beta - S_1}{a_4s\beta}$ ve

$n = \frac{a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 - S_1^2 + 2a_3a_4c\beta}{2a_4s\beta}$ dir. Denklem (34),

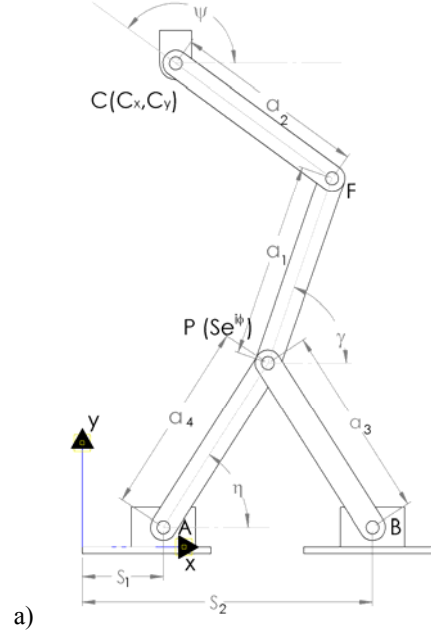
Denklem (31)'de kullanıldığında

$$\begin{aligned} P_x^2 + (mP_x + n)^2 - 2S_1P_x + S_1^2 - a_6^2 = 0 \\ \Rightarrow P_x = \frac{S_1 - mn \pm \sqrt{(S_1 - mn)^2 - (1+m^2)(S_1^2 - a_6^2 + n^2)}}{1+m^2} \end{aligned} \quad (35)$$

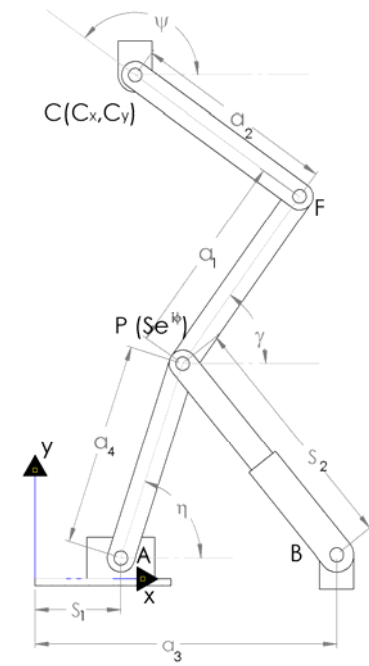
olur. Denklem (34)'den P_y değeri çözülür. S ve ϕ 'nin P_x ve P_y cinsinden bulunuşu Denklem (28) ile olmaktadır.

G. 2PRR-RRR ve PRR-RPR-RRR mekanizmaları

Şekil 7a'da görülen PRR-PRR-RRR mekanizması için prizmatik girdiler S_1 ve S_2 değerleridir. a_3 ve a_4 serbest olarak seçilebilen parametrelerdir.



a)



b)

Şekil 7. a) 2PRR-RRR ve b) PRR-RPR-RRR mekanizmaları

PAB üçgeninde kosinüs teoremi kullanıldığında:

$$a_3^2 = a_4^2 + (S_2 - S_1)^2 - 2a_4(S_2 - S_1)\cos\eta$$

$$\Rightarrow \eta = \cos^{-1} \left(\frac{a_4^2 + (S_2 - S_1)^2 - a_3^2}{2a_4(S_2 - S_1)} \right) \quad (36)$$

elde edilir. S ve ϕ şu şekilde bulunabilir:

$$S_1 + a_3 e^{i\eta} = S_1 + a_3 \cos\eta + ia_3 \sin\eta = S e^{i\phi}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(S_1 + a_3 \cos\eta)^2 + a_3^2 \sin^2\eta}, \quad (37)$$

$$\phi = \text{atan2}(S_1 + a_3 \cos\eta, a_3 \sin\eta)$$

Şekil 7b’de gösterilmiş olan PRR-RPR-RRR mekanizmasında kayar mafsal girdileri S_1 ve S_2 ’dir. a_3 ve a_4 değerleri serbest seçilebilen değerleridir. PAB üçgeninde kosinüs teoremi uygulandığında

$$S_2^2 = a_4^2 + (a_3 - S_1)^2 - 2a_4(a_3 - S_1)\cos\eta$$

$$\Rightarrow \eta = \cos^{-1} \left(\frac{a_4^2 + (a_3 - S_1)^2 - S_2^2}{2a_4(a_3 - S_1)} \right) \quad (38)$$

elde edilir. S ve ϕ şu şekilde bulunabilir:

$$S_1 + a_4 e^{i\eta} = S_1 + a_4 \cos\eta + ia_4 \sin\eta = S e^{i\phi}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(S_1 + a_4 \cos\eta)^2 + a_4^2 \sin^2\eta}, \quad (39)$$

$$\phi = \text{atan2}(S_1 + a_4 \cos\eta, a_4 \sin\eta)$$

III İşlev Sentezi Problemi

Kısım II’deki mekanizmaların herhangi biri için $z = f(x, y)$ işlevinin sentezi problemi aşağıdaki gibi oluşturulur:

- $i = 1, \dots, N > 4$ için verilen x_i, y_i ve z_i tasarım noktaları girdi olan q, r ve çıktı olan ψ ile doğrusal olarak aşağıda gösterildiği gibi bağlantılıdır:

$$\frac{x_i - x_1}{x_N - x_1} = \frac{q_i - q_1}{q_N - q_1}, \quad \frac{y_i - y_1}{y_N - y_1} = \frac{r_i - r_1}{r_N - r_1}, \quad \frac{z_i - z_1}{z_N - z_1} = \frac{\psi_i - \psi_1}{\psi_N - \psi_1} \quad (40)$$

q ve r mekanizma girdileri örneğin RPRRR mekanizmasında S ve ϕ ; RRRRR mekanizmasında θ ve β dir. Mekanizmalarda girdilerin hangisinin q ya da r seçilmesinin bir önemi yoktur. $q_1, q_N, r_1, r_N, \psi_1$ ve ψ_N sınır değerleri tasarımcının isteğine göre seçilebilmektedir ve bu değerler ile oynanarak hatalar azaltılabilir ve/veya mekanizmadaki uzuv boyutları istenildiği gibi değiştirilebilir.

- S_i ve ϕ_i girdi değerleri Kısım II’de anlatıldığı gibi hesaplanır. Tablo 1’de bu değerler özetlenmektedir.
- Kısım II’de açıklanan en küçük kareler toplamı yöntemi uygulanarak a_1, a_2, C_x, C_y tespit edilir. Tasarlanan ve hesaplanan z değerleri arasındaki yüzde hata grafik olarak çizilir ve hata varsayılan uzuv uzunlukları kabulleri ve/veya girdi/çıkış sınırları değiştirilerek azaltılır.

Mekanizma	Girdi	S	ϕ
<u>RPRRR</u>	S ve ϕ	S	ϕ
<u>RRRRR</u>	θ ve β	$\sqrt{a_3^2 + a_4^2 + 2a_3 a_4 \cos(\theta - \beta)}$	$\text{atan2}(a_3 \cos\theta + a_4 \cos\beta, a_3 \sin\theta + a_4 \sin\beta)$
<u>2RPR-RRR</u>	S ve S_2	S	$\cos^{-1} \left[\frac{(a_3^2 + S^2 - S_2^2)}{(2a_3 S)} \right]$
<u>RPR-RRR-RRR</u>	S ve β	S	Denklem (23)
<u>2RRR-RRR</u>	θ ve β	Denklem (26) - (28)	
<u>PRRRR</u>	S_1 ve β	$\sqrt{(S_1 + a_3 \cos\theta)^2 + a_3^2 \sin^2\theta}$	$\text{atan2}(S_1 + a_3 \cos\theta, a_3 \sin\theta)$
<u>PPRRR</u>	S_1 ve S_2	$\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$	$\text{atan2}(S_1, S_2)$
<u>PRR-RRR-RRR</u>	S_1 ve β	Denklem (35) ve Denklem (28)	
<u>2PRR-RRR</u>	S_1 ve S_2	$\sqrt{(S_1 + a_3 \cos\eta)^2 + a_3^2 \sin^2\eta}$	$\text{atan2}(S_1 + a_3 \cos\eta, a_3 \sin\eta)$
<u>PRR-RPR-RRR</u>	S_1 ve S_2	$\sqrt{(S_1 + a_4 \cos\eta)^2 + a_4^2 \sin^2\eta}$	$\text{atan2}(S_1 + a_4 \cos\eta, a_4 \sin\eta)$

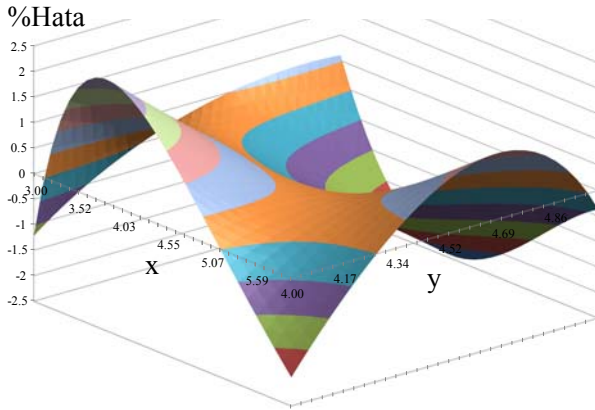
TABLO 1. Mekanizmalarda S ve ϕ değerleri

IV. Sayısal Örnek

Tüm mekanizmaların sentez formülasyonları Microsoft Excel® ortamına girilmiş ve pek çok sayısal örnek çalışılmıştır. Burada örnek olarak $3 \leq x \leq 6$ ve $4 \leq y \leq 5$ aralıkları için $z = x^{1.2}y^{0.2}$ işlevinin PRR-RRR-RRR mekanizması ile sentezi sunulmaktadır. Bu işlevin seçimi bir uygulama ifade etmemektedir ve tamamen akademik amaçlarla çalışılmıştır. x ve y tanım aralıkları 30 eşit aralığa bölünmüş, yani toplam 900 nokta ile sentez yapılmıştır. PRR-RRR-RRR mekanizmasında serbest seçilebilen dört uzuv boyutu ile girdi/çıkı parametrelerinin sınırları değiştirilerek maksimum hata değeri düşük bir mekanizma tasarımı yapılmıştır. Tasarım ölçütü olarak kullanılan multak yüzde hata

$$\%Hata = \left| \frac{Z_{istenen} - Z_{hesaplanan}}{Z_{istenen}} \right| \times 100$$

şeklinde tanımlıdır. Uzuv boyutları $a_3 = 6$, $a_4 = 4.5$, $a_5 = 5$ ve $a_6 = 4$ birim seçilmiştir. S, β girdi ve ψ çıktı değer aralıkları $1 \leq S \leq 5$, $75^\circ \leq \beta \leq 110^\circ$ ve $110^\circ \leq \psi \leq 165^\circ$ olarak seçilmiştir. Maksimum mutlak hata 0.19, maksimum mutlak yüzde hata ise %2.436 bulunmuştur. İşlev tanım kümesi üzerinde yüzde hata değişimi Şekil 8'de gösterilmektedir. Tasarlanan uzuv boyutları $a_1 = 3.827$, $a_2 = 6.649$, $C_x = 6.022$ ve $C_y = 4.083$ birimdir.



Şekil 8. İşlev tanım kümesi üzerinde yüzde hata değişimi

V. Sonuçlar

Bu çalışmada yalnızca döner ve kayar mafsallar içeren pek çok farklı düzlemsel 2-s° mekanizma kullanılarak çift girdili işlevlerin sentezi için ortak bir tasarım yöntemi sunulmuştur. Sentez formülasyonunun vakit alan sayısal en iyileme yöntemleri yerine analitik hesaba dayalı olması için bazı uzuv boyutlarının tasarımcı tarafından serbest seçilerek geri kalan uzuv boyutlarının tasarımı çalışılmıştır. Sentez yöntemi olarak, tanım kümesi üzerinde istenilen kadar tasarım noktası seçilmesine olanak veren en küçük karaler toplamı yöntemi

seçilmiştir. Uygulamada, belirli bir mekanizma için bu çalışmadaki yöntemler uygulanabileceği gibi, belirli bir işlevi yerine getirmek için tasarımcının mekanizmayı seçme özgürlüğü varsa tüm mekanizmalar çalışılarak en iyi neticeyi veren mekanizmanın seçilmesi de mümkündür.

Kaynakça

- [1] Svoboda. A. Computing Mechanisms and Linkages, Dover, 2. Baskı, §8-10, 1965.
- [2] Balli S. S. ve Chand S. Synthesis of a planar seven-link mechanism with variable topology for motion between two dead-center positions. Mechanism and Machine Theory, 38(11):1271-1287, 2003.
- [3] Daivagna U M. ve Balli S. S. Synthesis of a seven-bar slider mechanism with variable topology for motion between two dead-center positions. World Congress on Engineering, Londra, Cilt II, 2010.
- [4] Gadadl G. M., Ramakrishan H.V., Srinath M. S. ve Balli S. S. Dyad synthesis of planar seven-link variable topology mechanism for motion between two dead-centre positions. Journal of Mechanical and Civil Engineering, 3(3): 21-29, 2012.
- [5] Lakshminarayana K. ve Narayanamurthi R. G. Derivative synthesis of plane mechanisms to generate functions of two variables. Journal of Mechanisms, 5(2):249-271, 1970.
- [6] Lakshminarayana K. A simplified approach to two-freedom linkages. Journal of Engineering for Industry, 95:584-588, 1973.
- [7] Ramaiyan G. ve Lakshminarayana K. Contribution to synthesis of two-freedom linkages - I: Synthesis with second order precision points. ASME Bildiri No. 74-DET-34.
- [8] Lakshminarayana K. Contributions to the synthesis of two-freedom linkages - 2: Derivative synthesis. ASME Bildiri No. 74-DET-35.
- [9] Ramaiyan G. ve Lakshminarayana K. Synthesis of seven-link two-freedom linkages with sliding inputs and output using identical link positions. Mechanism and Machine Theory, 11(3):181-185, 1976.
- [10] Ramaiyan G. ve Lakshminarayana K. Nine-link plane mechanisms for two-variable function generation - I. Systematics. Mechanism and Machine Theory 11(3):187-191, 1976.
- [11] Ramaiyan G. ve Lakshminarayana K., Nine-link plane mechanisms for two-variable function generation - II. Synthesis. Mechanism and Machine Theory, 11(3):193-199, 1976.
- [12] Mruthyunjaya T. S. Synthesis of plane linkages to generate functions of two variables using point position reduction -part I. rotary inputs and output. Mechanism and Machine Theory, 7(3):363-370, 1972.
- [13] Mruthyunjaya T. S. Synthesis of plane linkages to generate functions of two variables using point position reduction -II. Sliding inputs and output. Mechanism and Machine Theory, 7(4):399-405, 1972.
- [14] Kohli D. ve Soni A.H. Synthesis of seven-link mechanisms. Journal of Engineering for Industry, 95:533-540,1973.
- [15] Kiper G., Bağdadioğlu B. ve Bilginan T. Function synthesis of the planar 5R mechanism using least squares approximation. Advances in Robot Kinematics, Springer, 69-76, 2014.
- [16] Kiper G. ve Bağdadioğlu B. Function generation synthesis with a 2-dof overconstrained double-spherical 7R mechanism using the method of decomposition and least squares approximation. New Trends in Mechanism and Machine Science: From Fundamentals to Industrial Applications, Springer, 167-174, 2015.
- [17] Levitskii N. I. Synthesis of Mechanisms by Chebyshev. USCB Bilim Akademisi, 1946.
- [18] Alizade R. I. ve Kilit Ö. Analytical synthesis of function generating spherical four-bar mechanism for the five precision points. Mechanism and Machine Theory, 40(7):863-878, 2005.